МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФЕСТИВАЛЬ ЗОЛОТОЕ РУНО.

6 класс. Комбинаторика–1. 2 июня 2010.

1. Среди 5 школьников A, B, C, D, E двое всегда лгут, а трое всегда говорят правду. Каждый из них сдавал зачет, причем все они знают, кто сдал зачет, а кто — нет. Они сделали следующие утверждения.
A: “B не сдал зачет”. B: “C не сдал зачет”. C: “A не сдал зачет”. D: “E не сдал зачет”. E: “D не сдал зачет”. Сколько из них зачет сдали?

2. а) Может ли случиться, что в компании из 99 девочек и 98 мальчиков все девочки знакомы с разным числом мальчиков, а все мальчики — с одним и тем же числом девочек?
б) А может ли случиться, что в компании из 98 девочек и 97 мальчиков все девочки знакомы с разным числом мальчиков, а все мальчики — с одним и тем же числом девочек?

3. Среди 1001 монеты 500 настоящих и 501 фальшивая. Все настоящие монеты весят одинаково, все фальшивые монеты отличаются по весу от настоящих. Фальшивые монеты могут весить по-разному, возможно, некоторые из них тяжелее настоящих, а некоторые — легче. Как с помощью взвешиваний на двухчашечных весах без гирь найти хотя бы одну фальшивую монету?

4. Клетчатый квадрат 2111×2111 разбит на прямоугольники 2×4 и 1×3 (прямоугольники можно поворачивать). Докажите, что найдется строка исходного квадрата, пересекающая нечетное количество прямоугольников разбиения.

5. Путешественник посетил остров на котором 1000 жителей, каждый из которых либо всегда говорит правду, либо всегда лжет. Все жители острова встали в круг лицом к центру, и каждый сказал путешественнику, является ли лжецом его сосед справа. На основании этих сообщений путешественник смог однозначно определить, сколько лжецов на острове. А сможете ли Вы?

6. Двое играют в следующую игру: первый выписывает в ряд по своему желанию буквы А или Б (слева направо, одну за другой; по одной букве за ход), а второй после каждого хода первого
а) меняет местами любые две из выписанных букв или ничего не меняет;
б) меняет местами последнюю букву с любой из написанных ранее или ничего не меняет.
После того, как оба игрока сделают по 2009 ходов, игра заканчивается. Может ли второй играть так, чтобы при любых действиях первого игрока в результате получился палиндром (т. е. слово, которое читается одинаково слева направо и справа налево)?

7. На площади стоят 100 столбов, любые две соединены ровно одним проводом. Электрик Петров покрасил провода в красный и зеленый цвета. После этого счетовод Сидоров на каждом красном проводе написал, сколько зеленых проводов имеют с ним общий конец. Может ли сумма всех написанных чисел равняться 233333?